

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11991 для 9 класса

1. Большая модница госпожа Такаято имеет 2026 разных колец и каждый день надевает на руки пять из них. Может ли так случиться, что к какому-то моменту времени каждое кольцо будет надето вместе с каждым другим ровно по разу? Определите, сколько дней для этого потребуется, либо докажите невозможность.

Решение

Выберем одно произвольное кольцо. Если в какой-то момент каждое кольцо было надето вместе с выбранным ровно по разу, то все остальные кольца (которых 2025 шт) должны разделиться на четверки, надевавшиеся в разные дни. Но 2025 не делится на 4, следовательно, такое невозможно.

Ответ: не может.

2. Существуют ли два различных приведенных квадратных трехчлена таких, что корни первого являются коэффициентами второго, а корни второго — коэффициентами первого? Либо найдите все пары таких трехчленов, либо обоснуйте невозможность.

Решение

Запишем искомые трехчлены в виде

$$f(x) = x^2 + px + q, \quad g(x) = x^2 + tx + s$$

Поскольку p, q — корни $g(x)$, а t, s — корни $f(x)$, верны соотношения (по теореме Виета)

$$\begin{cases} p + q = -t, \\ pq = s, \\ t + s = -p, \\ ts = q. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений сразу находим, что $q = s$.

Если $q \neq 0$, то, сокращая второе и четвертое уравнения на общий множитель, получаем $p = 1, t = 1$. Это дает два одинаковых многочлена, что не соответствует условию.

Если же $q = s = 0$, то второе и четвертое уравнения выполняются автоматически, а из первого и (или) третьего находим $t = -p$. Таким образом, выписанная система имеет бесконечно много решений вида

$$(p, q, t, s) = (p, 0, -p, 0), \quad p \in \mathbb{R},$$

что дает бесконечное количество пар многочленов вида

$$f(x) = x^2 + px, \quad g(x) = x^2 - px.$$

Ответ: $f(x) = x^2 + px, \quad g(x) = x^2 - px \quad (p \in \mathbb{R})$.

3. Дан ромб $ABCD$, острые углы которого B и D равны 60° . Прямая MN отсекает от сторон CB и CD отрезки CM и CN , сумма которых равна стороне ромба, а угол DAN равен 20° . Найдите отношение длин сторон треугольника AMN .

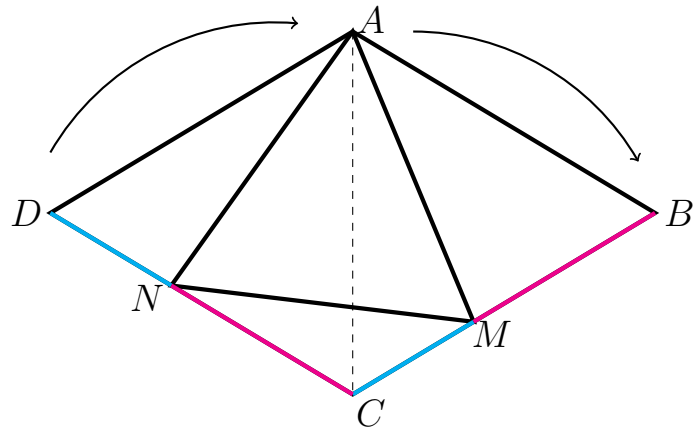
Решение

Из условия следует, что ромб составлен из двух равносторонних треугольников, а так как

$$CM + CN = CD = CB,$$

то $AM = BN$.

Выполним поворот вокруг точки C на 60° по часовой стрелке, переводящий точку D в точку A , а точку A в точку B . При этом точка M перейдет в точку N , так как $CN = BM$. Следовательно, угол MDN равен углу поворота и составляет 60° , а отрезки AN и AM равны. Равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным 60° , является равносторонним.



Ответ: $1 : 1 : 1$.

4. На посвящении в студенты Паша, Саша, Валя и Женья почистили несколько мешков овощей. Известно, что от одного мешка картофеля остается 5 кг очистков, от одного мешка моркови – 4 кг, от одного мешка лука – 1 кг и от одного мешка помидоров – 2 кг. У каждого получилось различное (по весу) количество отходов общим весом 18 кг. Единственный мешок картофеля достался Паше, а больше всего мешков овощей почистила Саша, получив с них

наименьший вес отходов. От помидоров было получено 6 кг очистков, а общий вес отходов у Паши и Жени оказался равным общему весу отходов Саши и Вали. Сколько мешков овощей почистил каждый из них?

Решение

Из условия задачи следует, что было получено 4 группы очистков (по одной группе на абитуриента), вес каждой группы уникален и в сумме дает 18 кг, а две пары групп равновесны (по 9 кг каждая пара). Также известно, что Сашина группа имеет наименьший вес, хотя включает больше всего видов отходов.

Опираясь на эту информацию, следует начать решение задачи с рассмотрения возможных вариантов распределения всех отходов между абитуриентами.

- а) *В одной паре первый получил 8 кг очистков, второй – 1 кг.* Противоречит условию, так как 1 кг можно получить только с одного мешка овощей, а 8 кг — не менее, чем с двух, следовательно, минимальный вес отходов не получится с максимального количества мешков.
- б) *В одной паре первый получил 7 кг очистков, второй – 2 кг.* Не подходит по тем же соображениям. 7 кг может получиться не менее, чем с двух мешков, а 2 кг — не более, чем с двух, следовательно, минимальный вес отходов не получится с максимального количества мешков.
- в) *В одной паре первый получил 6 кг очистков, второй – 3 кг.* Не противоречит условию. 3 кг можно получить с трех мешков, а 6 — с двух.
- г) *В одной паре первый получил 5 кг очистков, второй – 4 кг.* Аналогично предыдущему варианту. 4 кг можно получить с двух, трех или четырех мешков, а 5 — с одного или двух.

Таким образом, вес отходов распределяется на 6 кг и 3 кг в одной паре абитуриентов и 5 кг и 4 кг в другой.

Минимальный вес в одной группе отходов 3 кг. Его можно получить двумя или тремя мешками. Если он получен с двух мешков (одного мешка помидоров и одного мешка лука), то все остальные ученики должны были почистить по одному мешку (из соблюдения условия, что минимальный вес получен с максимального количества мешков), но это невозможно: 6 кг можно набрать не менее, чем с двух мешков. Таким образом, Саша почистила 3 мешка лука и получила с них 3 кг очистков.

Саша в паре с Валей получили 9 кг очистков на двоих, следовательно, Валин отход составил 6 кг с двух мешков. Это можно получить, почистив 1 мешок картофеля и 1 мешок лука или 1 мешок моркови и 1 мешок помидоров. Так как известно, что картошку чистил Паша, можно заключить, что Вале достались морковь и помидоры.

Во второй паре ребят Паша чистил картофель и получил с него 5 кг отходов. Тогда Женины очистки весили суммарно 4 кг. Известно, что всего было почи-

щено 3 мешка помидоров; 1 из них чистила Валя, тогда два других достались Жене.

Для наглядности сведем полученные сведения в таблицу:

имя	вес очистков	кол-во почищенных мешков	вид овощей
Паша	5	1	картофель
Саша	3	3	лук
Валя	6	2	помидоры + морковь
Женя	4	2	помидоры

Ответ: Паша — 1 мешок, Саша — 3 мешка, Валя — 2 мешка, Женя — 2 мешка.

5. Африканский животновод Комби Корм получил приплод слонят и бегемотиков. Если бы все новорожденные были слонятами, то общий вес всего приплода был бы на 200 кг больше, а если бы бегемотиками — на 100 кг меньше. Во сколько раз количество новорожденных слонят больше или меньше, чем бегемотиков? (Считайте, если понадобится, всех малышей одного вида одинаковыми.)

Решение

Пусть приплод состоит из m слонят и n бегемотиков.

Пусть один слоненок весит x , один бегемотик — y , а общий привес составляет S . Тогда

$$\begin{cases} mx + ny = S, \\ mx + nx = S + 200, \\ my + ny = S - 100. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, а из первого третье, получим

$$\begin{cases} n(x - y) = 200, \\ m(x - y) = 100. \end{cases}$$

Остается разделить почленно одно уравнение на другое.

$$\frac{m}{n} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: слонят в 2 раза меньше.