ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11881 для 8 класса

1. В 7:00 на табло были написаны числа 2 и 3. В тот же момент между ними появилась их сумма. Затем каждый час между каждой парой соседних чисел появлялась их сумма. Чему будет равна сумма всех чисел, написанных на табло, в 13:15? Предложите также способ подсчета суммы чисел, которые появились бы к 7:00 следующего утра.

Решение

Пусть в некоторый момент написаны числа

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \quad a_{n-1}, \quad a_n,$$

сумма которых равна S_n. Тогда через час (после очередного подхода) будут написаны

$$a_1, \quad a_1+a_2, \quad a_2, \quad a_2+a_3, \quad a_3, \quad \ldots \quad a_{n-1}, \quad a_{n-1}+a_n, \quad a_n.$$

Их сумма

$$S_{n+1} = 2a_1 + 3a_2 + 3a_3 + \ldots + 3a_{n-1} + 2a_n = 3S_n - (a_1 + a_n).$$

Поскольку крайние числа всегда сохраняются и равны 2 и 3, то

$$S_{n+1} = 3S_n - 5,$$

Начальная сумма $S_0 = 2 + 3 = 5$ и она менялась 7 раз (первый раз – в 7:00, седьмой раз – в 13:00). Остается заняться арифметикой

$S_1 = 3 \cdot 5 - 5 = 10,$ $S_2 = 3 \cdot 10 - 5 = 25,$ $S_3 = 3 \cdot 25 - 5 = 70,$
$S_4 = 3 \cdot 70 - 5 = 205,$ $S_5 = 3 \cdot 205 - 5 = 610,$ $S_6 = 3 \cdot 610 - 5 = 1825,$
$S_7 = 3 \cdot 1825 - 5 = 5470.$

Ответ: 5470, $S_{n+1} = 3S_n - 5$, $S_0 = 5$.

2. Сороконожка Стефания хранит в сундучке 570 разноцветных носков и каждое утро надевает на все свои ноги 38 из них (еще две ее конечности, разумеется, руки). Может ли так случиться, что к какому-то моменту времени каждый носок будет надет вместе с каждым другим ровно по разу? Определите, сколько дней для этого потребуется, либо докажите невозможность.

Решение

Выберем один произвольный носок. Если в какой-то момент каждый носок был надет вместе с выбранным ровно по разу, то все остальные носки (которых 569 шт) должны разделиться на комплекты по 37 штук, надевавшиеся в разные дни. Но 569 не делится на 37 (это можно проверить хотя бы в столбик), следовательно, такое невозможно.

Ответ: не может.

3. На посвящении в студенты Паша, Саша, Валя и Женя почистили несколько мешков овощей. Известно, что от одного мешка картофеля остается 5 кг очистков, от одного мешка моркови – 4 кг, от одного мешка лука – 1 кг и от одного мешка помидоров – 2 кг. У каждого получилось различное (по весу) количество отходов общим весом 18 кг. Единственный мешок картофеля достался Паше, а больше всего мешков овощей почистила Саша, получив с них наименьший вес отходов. От помидоров было получено 6 кг очисток. Общий вес отходов у Паши и Жени оказался равным общему весу отходов Саши и Вали. Сколько мешков каждого овоща было почищено?

Решение

Из условия задачи следует, что было получено 4 группы очистков (по одной группе на абитуриента), вес каждой группы уникален и в сумме дает 18 кг, а две пары групп равновесны (по 9 кг каждая пара). Также известно, что Сашина группа имеет наименьший вес, хотя включает больше всего видов отходов.

Опираясь на эту информацию, следует начать решение задачи с рассмотрения возможных вариантов распределения всех отходов между абитуриентами.

а) *В одной паре первый получил 8 кг очистков, второй – 1 кг.* Противоречит условию, так как 1 кг можно получить только с одного мешка овощей, а 8 кг — не менее, чем с двух, следовательно, минимальный вес отходов не получится с максимального количества мешков.

б) *В одной паре первый получил 7 кг очистков, второй – 2 кг.* Не подходит по тем же соображениям. 7 кг может получиться не менее, чем с двух мешков, а 2 кг — не более, чем с двух, следовательно, минимальный вес отходов не получится с максимального количества мешков.

в) *В одной паре первый получил 6 кг очистков, второй – 3 кг.* Не противоречит условию. 3 кг можно получить с трех мешков, а 6 — с двух.

г) *В одной паре первый получил 5 кг очистков, второй – 4 кг.* Аналогично предыдущему варианту. 4 кг можно получить с двух, трех или четырех мешков, а 5 — с одного или двух.

Таким образом, вес отходов распределяется на 6 кг и 3 кг в одной паре абитуриентов и 5 кг и 4 кг в другой.

Минимальный вес в одной группе отходов 3 кг. Его можно получить двумя или тремя мешками. Если он получен с двух мешков (одного мешка помидоров и одного мешка лука), то все остальные ученики должны были почистить по одному мешку (из соблюдения условия, что минимальный вес получен с максимального количества мешков), но это невозможно: 6 кг можно набрать не менее, чем с двух мешков. Таким образом, Саша почистила 3 мешка лука и получила с них 3 кг очистков.

Саша в паре с Валей получили 9 кг очистков на двоих, следовательно, Валин отход составил 6 кг с двух мешков. Это можно получить, почистив 1 мешок картофеля и 1 мешок лука или 1 мешок моркови и 1 мешок помидоров. Так как известно, что картошку чистил Паша, можно заключить, что Вале достались морковь и помидоры.

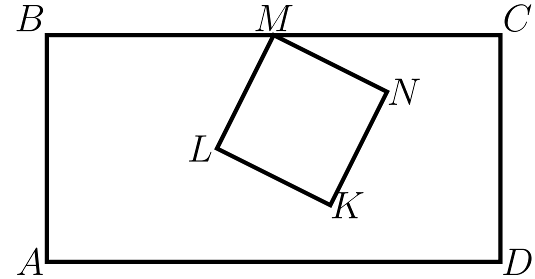
Во второй паре ребят Паша чистил картофель и получил с него 5 кг отходов. Тогда Женины очистки весили суммарно 4 кг. Известно, что всего было почищено 3 мешка помидоров; 1 из них чистила Валя, тогда два других достались Жене.

Для наглядности сведем полученные сведения в таблицу:

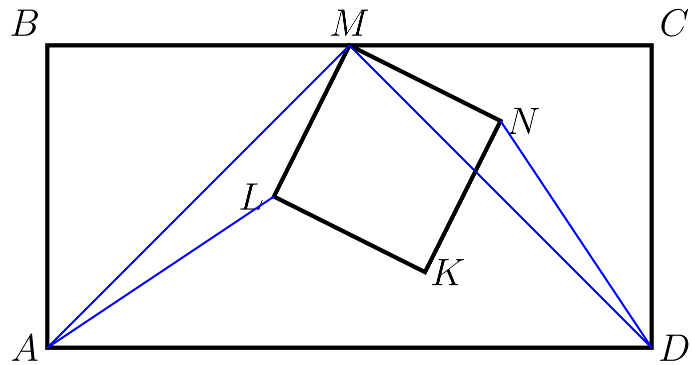
имя	вес очистков	кол-во почищенных мешков	вид овощей
Паша	5	1	картофель
Саша	3	3	лук
Валя	6	2	помидоры + морковь
Женя	4	2	помидоры

Ответ: 1 мешок картофеля, 1 мешок моркови, 3 мешка помидоров, 3 мешка лука.

4. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB вдвое короче стороны BC. Вершина M квадрата $KLMN$ лежит на середине стороны BC (см. рис). Выясните, при каких значениях угла CMN рассточние от A до L больше, а при каких – меньше, чем расстояние от D до N. Выясните также, как зависит ответ на поставленный вопрос от того, пересекает ли какая-нибудь сторона квадрата $KLMN$ сторону AD.



Решение



Соединим середину стороны M с вершинами A и D, а также построим отрезки AL и DN, которые необходимо сравнить.

Из равенств $AB = BM = MC$ следует, что угол AMD прямой (прямоугольник сложен из двух квадратов). Угол LMN также прямой, поэтому он может быть совмещен с углом AMD поворотом. Отсюда следует равенство углов AML и DMN.

Рассмотрим треугольники AML и DMN. Они равны по двум сторонам и углу между ними: $AM = MD$ как диагонали равных квадратов, из которых составлен прямоугольник; $LM = MN$ как стороны внутреннего квадрата; равенство углов AML и DMN доказано выше.

Таким образом, $AL = DN$ и выполнение этого равенства не зависит от меры угла CMN.

Случай, когда стороны $KLMN$ пересекают AD, рассматривается полностью аналогично.

Ответ: AL всегда равно DN.

5. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6y \leqslant 0, \\ y^2 - 2xy + 9 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение

Складывая неравенства, получаем

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6(x - y) + 9 \leqslant 0,$$

откуда

$$(x - y)^2 - 6(x - y) + 9 \leqslant 0.$$

Снова сворачивается полный квадрат

$$(x - y - 3)^2 \leqslant 0,$$

откуда следует, что $x - y - 3 = 0$.

Подставим $x = y + 3$ в систему

$$\begin{cases} (y + 3)^2 - 6(y + 3) + 6y \leqslant 0, \\ y^2 - 2(y + 3)y + 9 \leqslant 0. \end{cases}$$

После упрощения получаем

$$\begin{cases} y^2 + 6y - 9 \leqslant 0, \\ y^2 + 6y - 9 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $y^2 + 6y - 9 = 0$.

Остается решить полученное квадратное уравнение и записать ответ.

Ответ: $x = \pm 3\sqrt{2}$, $y = -3 \pm 3\sqrt{2}$.