ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17111 для 11 класса

1. Найдите все решения уравнения

$$\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)\sin 3x=2.$$

Решение

Разделим обе части уравнения на 2 и воспользуемся методом вспомогательного аргумента

$$\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\sin 3x=1 \;\Leftrightarrow\; \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin 3x=1.$$

Поскольку $|\sin\alpha|\leqslant 1$, полученное равенство может выполняться только когда оба множителя равны 1 или оба равны -1.

В первом случае

$$\begin{cases}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1,\\ \sin 3x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ 3x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases} \Leftrightarrow\; x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n\ (n\in\mathbb{Z}).$$

Во втором случае

$$\begin{cases}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1,\\ \sin 3x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\\ 3x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases} \Leftrightarrow\; x=-\frac{\pi}{6}+2\pi m\ (m\in\mathbb{Z}).$$

Объединяя оба случая, получаем ответ.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n\ (n\in\mathbb{Z})$.

2. Известно, что некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в трех целых точках значение 2025. Может ли он принимать в некоторой целой точке значение 2026? Если такой многочлен существует, найдите его наименьшую возможную степень, если нет — докажите невозможность.

Решение

Из того факта, что x^n-y^n делится без остатка на $x-y$ при любом натуральном n (это можно принимать от участников без обоснования) легко выводится, что $P(a)-P(b)$ делится без остатка на $a-b$ для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами.

Пусть

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 2025 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z})$$

и пусть существует такое $y \in \mathbb{Z}$, что $P(y) = 2026$.

Тогда

$$\frac{P(y) - P(x_k)}{y - x_k} = \frac{1}{y - x_k} \in \mathbb{Z} \quad (k = 1, 2, 3),$$

откуда следует, что $y - x_k = 1$ для $k = 1, 2, 3$. Но любое целое число не может отличаться на 1 от трех различных целых. Полученное противоречие доказывает невозможность искомой ситуации.

Ответ: не может!

3. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке E. Пусть L, S — центры окружностей, описанных около треугольников ALB и CLD. Выясните, могут прямые OL и SE пересекаться внутри наибольшей окружности и могут ли они пересекаться вне ее? Для каждого случая постройте соответствующую конфигурацию или докажите невозможность.

Решение

Исследуем «геометрическое ОДЗ» задачи: **заметим, что** окружность с центром в точке L не может проходить через точку L.
Описанная конфигурация невозможна.

4. Африканский животновод Комби Корм получил приплод слонят и бегемотиков. Если бы все новорожденные были слонятами, то общий вес всего приплода был бы на $p\%$ больше, а если бы бегемотиками – на $q\%$ меньше. Во сколько раз вес всех новорожденных слонят больше или меньше веса всех новорожденных бегемотиков? (Считайте, если понадобится, всех малышей одного вида одинаковыми.)

Решение

Пусть все слонята весят u, все бегемотики – v, общий привес составляет S, а один слоненок тяжелее одного бегемотика в t раз. Тогда

$$\begin{cases} u + v = S, \\ u + tv = (1 + \bar{p})S, \\ \dfrac{u}{t} + v = (1 - \bar{q})S. \end{cases}$$

(Здесь $\bar{p} = p/100$, $\bar{q} = q/100$.)

Разделив второе уравнение на третье, найдем $t = \dfrac{1+\bar{p}}{1-\bar{q}}$.

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$1 + \bar{p} = \frac{u + tv}{u + v} = \frac{\frac{u}{v} + t}{\frac{u}{v} + 1},$$

откуда $\dfrac{u}{v} = \dfrac{t - (1+\bar{p})}{\bar{p}}$. Остается подставить найденное t.

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{\bar{p}}\left(\frac{1+\bar{p}}{1-\bar{q}} - (1+\bar{p})\right) = \frac{1+\bar{p}}{\bar{p}} \cdot \frac{\bar{q}}{1-\bar{q}}.$$

Возвращаясь к исходным процентам, $\dfrac{u}{v} = \dfrac{q}{p} \cdot \dfrac{100+p}{100-q}$.

Ответ: Искомое отношение равно $\dfrac{q}{p} \cdot \dfrac{100+p}{100-q}$.

5. 2026 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Выясните, зависит ли величина S от разности d этой прогресси и найдите S, если

$$S = \frac{a_1\, a_{2026}}{a_1\, a_2} + \frac{a_1\, a_{2026}}{a_2\, a_3} + \frac{a_1\, a_{2026}}{a_3\, a_4} + \ldots + \frac{a_1\, a_{2026}}{a_{2025}\, a_{2026}}.$$

Решение

Вынесем числитель всех дробей, составляющих S, за скобки и рассмотрим произвольное слагаемое оставшейся суммы. Представим его в виде суммы (или разности) двух дробей, используя метод неопределенных коэффициентов

$$\frac{1}{a_k\, a_{k+1}} = \frac{A}{a_k} + \frac{B}{a_{k+1}} = \frac{A}{a_1 + (k-1)d} + \frac{B}{a_1 + kd} = \frac{a_1(A+B) - Bd + (A+B)kd}{a_k\, a_{k+1}}.$$

Приравнивая коэффициент при k нулю, получаем, что $A = -B$. Теперь чтобы получить в числителе единицу достаточно положить $B = -1/d$. Таким образом,

$$\frac{1}{a_k\, a_{k+1}} = \frac{1/d}{a_1 + (k-1)d} - \frac{1/d}{a_1 + kd} = \frac{1/d}{a_k} - \frac{1/d}{a_{k+1}}.$$

Теперь вся сумма равна

$$S = \frac{a_1\, a_{2026}}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \ldots \frac{1}{a_{2025}} - \frac{1}{a_{2026}}\right) =$$

$$= \frac{a_1\, a_{2026}}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2026}}\right) = \frac{a_1\, a_{2026}}{d} \cdot \frac{2025\, d}{a_1\, a_{2026}} = 2025.$$

Ответ: $S = 2025$, от разности прогрессии не зависит.